

Übungen zur Vorlesung Numerik I

(Blatt 6)

Sommersemester 2004

**Abgabe der Aufgaben bis 01.06.04, 18.00 Uhr
im Postfach 84 Ebene 6**

Aufgabe 1:

(4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. Es sei

$$d_i := \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

- (a) Beweisen Sie, daß die Kondition der sogenannten *zeilenäquilibrierten* Matrix $D \cdot A$ bezüglich der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ nicht größer wird als die von A .
- (b) Berechnen Sie zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

die Zeilenäquilibrierte $D \cdot A$ und vergleichen Sie die Konditionen cond_∞ .

Aufgabe 2:

(4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. $\bar{L}\bar{R}$ sei die leicht „fehlerhafte“ (etwa durch Gausselimination gewonnene) LR -Zerlegung von $P \cdot A$ mit

$$P(A + \Delta A) = \bar{L}\bar{R}.$$

Die Existenz der Zerlegung mit regulären Matrizen \bar{L} und \bar{R} sei vorausgesetzt. Die (durch Vorwärts-Rückwärtssubstitution gewonnene) Lösung $x^{(0)}$ des Gleichungssystems $\bar{L}\bar{R}x^{(0)} = Pb$ ist eine Näherung für die exakte Lösung $\hat{x} = A^{-1}b$.

Zur Verbesserung von $x^{(0)}$ wird die folgende **Nachiteration** verwendet:
Berechne

$$x^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

durch (exaktes) Lösen von

$$\begin{aligned} \bar{L}\bar{R} \Delta x^{(i)} &= P r^{(i)} \quad \text{mit} \quad r^{(i)} := b - Ax^{(i)}, \\ x^{(i+1)} &:= x^{(i)} + \Delta x^{(i)}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (a) Die Iteration läßt sich schreiben als

$$x^{(i+1)} = T x^{(i)} + c$$

mit einer Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einem Vektor $c \in \mathbb{R}^n$.

- (b) Unter der Voraussetzung

$$\|I - (A + \Delta A)^{-1} A\| =: q < 1$$

konvergiert die Folge $\{x^{(i)}\}$ gegen die exakte Lösung \hat{x} , d.h. es gilt $\|x^{(i)} - \hat{x}\| \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$.

Aufgabe 3:

(4 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und Lösung $x = (1, 1)^T$.

- (a) Berechnen Sie die Kondition $\text{cond}(A)$ für die Norm $\|\cdot\|_2$.
Hinweis: Die Inverse der Matrix A wird nicht benötigt.

- (b) Sei

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.125 \end{pmatrix}$$

eine Störung in A . Wie groß darf der Fehler Δb in b sein, damit für die Abweichung Δx von x gilt: $\|\Delta x\|_2 \leq 0.5$?

Aufgabe 4:

(4 Punkte)

Berechnen Sie die LR- (ohne Pivotierung) und Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Besteht ein Zusammenhang zwischen diesen Zerlegungen?

Berechnen Sie nun die QR-Zerlegung von A und die Cholesky-Zerlegung der Matrix $B := A^T A$. Besteht ein Zusammenhang zwischen diesen Zerlegungen?